Asymptotic Error Distributions of theCrank-Nicholson Scheme for SDEs Driven by Fractional Brownian Motion

著者	永沼 伸顕
号	62
学位授与機関	Tohoku University
学位授与番号	理博第2849号
URL	http://hdl.handle.net/10097/58864

論 文 内 容 要 旨

氏　　名	永沼 伸顕	提出年	平成 26 年
学位論文の題　　目	Asymptotic Error Distributions of the Crank-Nicholson Scheme for SDEs Driven by Fractional Brownian Motion （非整数ブラウン運動により駆動される確率微分方程式に対するクランク・ニコルソン近似の誤差分布の漸近挙動）		

論 文 目 次

論 文 要 旨

本博士論文では，Hurst 定数$1/3 < H < 1/2$の非整数 Brown 運動Bにより駆動されるドリフト項のない1次元確率微分方程式$dX_t = \sigma(X_t)\, d^\circ B_t$の解$X$と解に対する時間幅$2^{-m}$の Crank-Nicholson 近似$\hat{X}^{(m)}$を考え，近似の重み付誤差$2^{m(3H-1/2)}(\hat{X}^{(m)} - X)$が確率過程として弱収束することを示す．

問題の背景を述べる．与えられた確率微分方程式(SDE)の解が数値的に計算できるかということは基本的な問題である．より具体的には，帰納的に定義された確率変数列を用いて SDE の解を近

似することを考える．最も簡単なものは，Euler 近似であろう．Euler 近似は，マルチンゲール理論を基礎とした伊藤解析の枠組みで非常に多くの先行研究があり，解の駆動過程に関する安定性の議論と関連して，重み付誤差が収束する条件や極限の特徴付けなどが知られている．

しかしながら，本論文で考える非整数 Brown 運動(fBm)により駆動される SDE の研究，とくに，解の近似理論は発展途上である．fBm とは Brown 運動の拡張のひとつで，平均0，共分散が Hurst 定数$0<H<1$によって決まる連続な Gauss 過程である．このHは確率過程のパスの Hölder 連続性を支配し，パスはH未満の Hölder 連続性を持つ．$H=1/2$のときは通常の Brown 運動であるが，$H\neq 1/2$のときはマルチンゲール性を持たず，伊藤解析の枠組みから外れる．この伊藤解析が適用できないという問題とパスの連続性の悪さから，Hurst 定数が$1/2$未満の fBm により駆動される SDE に関する研究は 2000 年ごろまで進んでいなかった．ちょうどその頃，Lyons によるラフパス理論や Russo-Vallois の意味での対称積分の fBm への応用があり，SDE を厳密に扱えるようになった．さらに，2005 年ごろに Nualart，Peccati，Tudor，Ortiz-Latorre らによって4次モーメント定理が証明され，fBm の汎関数の極限分布の解析が可能となった．とくにこの定理により，同時分布の弱収束が容易に証明できるようになり，その応用として，解の重み付近似誤差の極限分布の考察が可能となった．

本論文での研究手法について述べる．はじめに，4次モーメント定理を用いて weighted Hermite variation とよばれる Wiener 汎関数の漸近挙動を考察する．つぎに，Russo-Vallois の意味での対称積分を用いて SDE の解に意味をつけ，その解に対して Crank-Nicholson 近似を適用する．そして，重み付誤差の主要項の収束を weighted Hermite variation の収束を用いて示す．最後に，剰余項が0に収束することを示す．主要項と剰余項の考察の際に，Crank-Nicholson 近似が陰解法であるために誤差を確率空間全体で評価することが出来ない事と fBm がマルチンゲール性，とくに，独立増分性を持たない事に起因する煩雑さがある．剰余項評価が本論文の多くの部分を占める．

次に，博士論文の流れにそって，上記のことを詳しく述べる．第 1 章は，序論であり，上述のような問題の背景と主定理および証明の手法などを述べている．第 2 章は準備のための章で，本論文で用いる記号や先行研究をまとめている．

第 3 章は，weighted Hermite variation の考察にあてられる．この weighted Hermite variation は，実数値関数gと自然数qに対して

$$G_{g,q}^{(m)}(t)=\sum_{j=0}^{\lfloor 2^m t\rfloor -1}\frac{g\left(B_{(j+1)2^{-m}}\right)+g\left(B_{j2^{-m}}\right)}{2}H_q\left(2^{mH}\Delta B_{j2^m}\right)$$

と定義される．ただし，H_qはq次の Hermite 多項式，$\Delta B_{j2^m}=B_{(j+1)2^{-m}}-B_{j2^{-m}}$，$\lfloor \xi \rfloor$は$\xi>0$の整数部分である．この weighited Hermite variation は$m\to\infty$のときに次の漸近挙動を持つ．

定理 1. 自然数qは2以上，関数gは滑らかで導関数は多項式増大を持つとする．このとき，$1/2q<H<1-1/2q$であれば，$m\to\infty$のとき$(B,G_{g,q}^{(m)})$は Skorohod 位相における弱収束の意味で$(B,c_{q,H}\int_0 g(B_s)dW_s)$へ収束する．ただし，$c_{q,H}$は正定数，$W$は$B$とは独立な通常の Brown 運動である．

定理 1 に関して，Nourdin-Nualart-Tudor (2010)による先行研究がある．定理 1 は彼らの結果を含まない形で述べたが，博士論文においては，定理 1 は彼らの結果を含む形でより一般的に証明を与えた．

第 4 章では，近似の重み付誤差$2^{m(3H-1/2)}(\hat{X}^{(m)}-X)$の収束を示す．fBm Bは確率空間$(\Omega,\mathcal{F},P)$上で定義されているとする．まずは，実数値関数σに対して，SDE

$$\begin{cases} dX_t=\sigma(X_t)d^\circ B_t, & t\in(0,1], \\ X_0=x_0\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

を Russo-Vallois の意味での対称積分$d^\circ B$を用いて意味をつける．自然数mに対して，Crank-Nicholson 近似$\hat{X}^{(m)}$を，ある$\Omega^{(m)}\subset\Omega$上で

$$\begin{cases} \hat{X}_0^{(m)}=x_0 \\ \hat{X}_t^{(m)}=\hat{X}_{\eta^{(m)}(t)}^{(m)}+\dfrac{1}{2}\left\{\sigma\left(\hat{X}_t^{(m)}\right)+\sigma\left(\hat{X}_{\eta^{(m)}(t)}^{(m)}\right)\right\}(B_t-B_{\eta^{(m)}(t)}), & t\in(0,1], \end{cases}$$

と定義する．ただし，$\eta^{(m)}(t)=\sup\{l2^{-m}:0\leq l2^{-m}<t\}$である．この Crank-Nicholson 近似の定義式は，$\hat{X}_t^{(m)}$の方程式として解釈するが，陰関数定理を用いて解の存在を保証するために$\Omega^{(m)}$に制限して考える．$(\Omega^{(m)})^{\complement}$ 上では$\hat{X}_t^{(m)}=x_0$と初期値で定義する．この$\hat{X}^{(m)}$は連続な確率過程であることに注意する．

次に，SDE の解Xと Crank-Nicholson 近似$\hat{X}^{(m)}$の表現を Nourdin (2008)に従って述べる．まず SDE の解は$X=\phi(x_0,B)$と Doss-Sussmann 型の解として与えられる．ただし，ϕはある常微分方程式で特徴付けられる2変数関数である．そして，σに対する楕円性の仮定の下で，Crank-Nicholson 近似$\hat{X}^{(m)}$は，$\Omega^{(m)}$上で$\hat{X}^{(m)}=\phi(x_0,B+U^{(m)}+(\text{small term}))$と表わされる．ここで$U^{(m)}$は

$$U_t^{(m)}=\sum_{j=0}^{\lfloor 2^m t\rfloor-1}\left\{f_3\left(\hat{X}_{j2^{-m}}^{(m)}\right)\left(\Delta B_{j2^m}\right)^3+f_4\left(\hat{X}_{j2^{-m}}^{(m)}\right)\left(\Delta B_{j2^m}\right)^4+R(\hat{X}_{j2^{-m}}^{(m)},\Delta B_{j2^m})\right\}$$

で定義される確率過程である．ただし，$f_3=(\sigma^2)''/24$，$f_3=\sigma(\sigma^2)'''/48$であり，$R$は$|R(\xi,h)|\leq M|h|^5$を満たす関数である．これらより，$\Omega^{(m)}$上では，$\hat{X}^{(m)}-X=\sigma(X)U^{(m)}+(\text{small term})$がわかり，この表現より，$2^{m(3H-1/2)}(\hat{X}^{(m)}-X)=G_{g,3}^{(m)}+(\text{small term})$が得られる．ただし，$g=f_3\circ\phi$である．すると定理 1 より$G_{g,3}^{(m)}$が収束することが分かる．最後に，small term が0に収束することを示すが，fBm がマルチンゲール性を持たないために，この部分の評価が難しい．以上により，次の定理を得る．

定理 2. 関数σは滑らかで，σ自身とすべての導関数は有界とする．さらに，$\inf|\sigma|>0$を満たすとする．このとき，$1/3<H<1/2$ならば

$$\lim_{m\to\infty}(B,2^{m(3H-1/2)}(\hat{X}^{(m)}-X))=(B,c_{3,H}\sigma(X),\int_0^{\cdot}f_3(X_s)dW_s)$$

が一様位相における弱収束の意味で成り立つ．ここで，$c_{3,H}$はHに依存する正定数，WはBとは独立な通常の Brown 運動，dWは伊藤積分を表わす．

この定理で表れる正定数$c_{3,H}$および Brown 運動Wは定理 1 で与えられるものである．

論文審査の結果の要旨

ブラウン運動に代表されるセミマルチンゲールで駆動される確率微分方程式は、数学の様々な分野と関係し、理論上重要である。

さらに、現実の具体的な問題を確率過程としてモデル化して解析する際の基礎理論として重要であるのは言うまでもない。その際、通常のランダムな項を含まない微分方程式と同様、確率微分方程式の解を近似すること、近似の早さの決定は重要な問題である。

オイラー・丸山近似、Wong-Zakai 近似などの近似が 1970 年代から研究されて来た。

近似の早さで正規化した誤差の分布を決定するのは次のステップの重要な問題である。

ただし、その誤差分布の決定は、1990 年代後半から、Protter, Jacod, Kurtz らの極限定理に関する深い研究を待って、初めてなされたものである。

応用上現れる確率過程として、セミマルチンゲールの枠組みに入らない重要な確率過程も多数存在する。その代表例は、非整数ブラウン運動である。この場合は、積分の意味を与えることも非自明な問題になる。

非整数ブラウン運動を含む確率過程で駆動される確率微分方程式の理論はラフパスで駆動される微分方程式(Rough differential equation)の典型例として定式化され、この場合の近似、およびその誤差分布の研究はここ数年始まったばかりである。

本博士論文の研究に関係するのは この方面の Neuenkirch と Nourdin の研究である。

彼らは Hurst 定数 H が 1/3<H<1/2 を満たす 1 次元非整数ブラウンにより駆動された確率微分方程式の解の Crank-Nicholson 近似解の近似誤差分布の研究を行った。ただし、彼らは拡散係数が 2 次関数の場合に正規化定数のオーダーと近似誤差分布の決定を行ったのみであった。永沼伸顕は近似誤差をマリアバン解析などの手法を用いて解析し、2 次関数とは限らない一般の場合に正規化定数のオーダーと誤差分布を決定した。

この結果は、1 次元の場合の結果であるが、多次元の場合の研究にも影響を与えるものと思われる。本博士論文の結果は、自立して研究活動を行うに必要な高度の研究能力と学識を有することを示している。したがって，永沼伸顕提出の博士論文は，博士（理学）の学位論文として合格と認める。